Álgebra Linear

Professores: **Ricardo Paleari/Cléber Barreto**

Departamento de Matemática - UFPR

Curso: Turma Especial de Verão
Data: 24/02/2020

Primeira Prova - Soluções

- Não serão aceitas respostas sem justificativas. Você pode usar, sem provar, todos os resultados feitos em sala de aula;
- Você pode usar lápis em toda a resolução das questões;
- A menos que seja especificado, todo espaço vetorial nessa prova será considerado sobre um corpo comutativo $\mathbb{K}$.

(2,0) 1. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $T : V \to W^n$ uma função. Escreva, para cada $v \in V$, $T(v) = (T_1(v), ..., T_n(v))$. Assim, ficam definidas as funções $T_j : V \to W$ para cada $j = 1, ..., n$. Mostre que T é linear se, e somente se, T_j é linear para todo $j = 1, ..., n$.

Solução: Para cada $j = 1, ..., n$ seja $\pi_j : W^n \to W$ a projeção dada por $\pi_j(w_1, ..., w_n) = w_j$. Claramente π_j é linear para todo $j = 1, ..., n$. Além disso, $T_j = \pi_j \circ T$ por definição de T_j. Logo, se T é linear, então cada T_j é uma composição de transformações lineares e portanto linear. Reciprocamente, suponha que T_j seja linear para cada $j = 1, ..., n$, então dados $v_1, v_2 \in V$ e $k \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{array}{rcl} T(v_1 + kv_2) & = & (T_1(v_1 + kv_2), ..., T_n(v_1 + kv_2)) \\ & = & (T_1(v_1) + kT_1(v_2), ..., T_n(v_1) + kT_n(v_2)) \\ & = & (T_1(v_1), ..., T_n(v_1)) + k(T_1(v_2), ..., T_n(v_2)) \\ & = & T(v_1) + kT(v_2), \end{array}$$

logo T é linear.

(3,0) 2. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão n. Denotamos por $V_{\mathbb{R}}$ o mesmo espaço vetorial V mas considerado como um espaço vetorial apenas sobre $\mathbb{R}$. Seja $\beta = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ uma base ordenada de V.

(1,5) a) Mostre que $\widetilde{\beta} = \langle v_1, ..., v_n, iv_1, ..., iv_n \rangle$ é uma base de $V_{\mathbb{R}}$.

(1,5) b) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Definimos $T_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ como a mesma função T mas pensada apenas como $\mathbb{R}$-linear. Encontre uma relação entre as matrizes $[T]_\beta$ e $[T_{\mathbb{R}}]_{\widetilde{\beta}}$.

Solução:

a) Suponha que existam $a_1, ...a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ de modo que

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n + b_1(iv_1) + ... + b_n(iv_n) = 0$$

Como V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, esta equação é equivalente a:

$$(a_1 + ib_1)v_1 + ... + (a_n + ib_n)v_n = 0.$$

Como $\langle v_1, ..., v_n \rangle$ é linearmente independente em V, segue que $a_j + ib_j = 0$ para todo $j = 1, ..., n$, e portanto $a_j = b_j = 0$ para todo $j = 1, ..., n$, o que conclui que $\widetilde{\beta}$ é linearmente independente.

Agora dado $v \in V_{\mathbb{R}} = V$, como β é gerador e V, existem $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ tais que $v = z_1 v_1 + ... + z_n v_n$. Escreva, para cada $j = 1, ..., n$, $z_j = a_j + ib_j$ com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Então

$$v = (a_1 + ib_1)v_1 + ... + (a_n + ib_n)v_n = a_1 v_1 + ... + a_n v_n + b_1(iv_1) + ... + b_n(iv_n) \in \textbf{span } \widetilde{\beta}.$$

Assim $\widetilde{\beta}$ é gerador de $V_{\mathbb{R}}$, e portanto $\widetilde{\beta}$ é base de $V_{\mathbb{R}}$.

b) Escreva $[T]_\beta = (z_{kl})$, com $z_{kl} = a_{kl} + ib_{kl}$, $a_{kl}, b_{kl} \in \mathbb{R}$ para todo $k, l \in \{1, ..., n\}$. Considere agora as matrizes com entradas reais $A = (a_{kl}) \in M_n(\mathbb{R})$ e $B := (b_{kl}) \in M_n(\mathbb{R})$, isto é, $[T]_\beta = A + iB$. Daí, para cada $k = 1, ..., n$ temos

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{R}}(v_k) &= T(v_k) \\ &= z_{1k} v_1 + ... + z_{nk} v_n \\ &= (a_{1k} + ib_{1k})v_1 + ... + (a_{nk} + ib_{nk})v_n \\ &= a_{1k} v_1 + ... + a_{nk} v_n + b_{1k}(iv_1) + ... + b_{nk}(iv_n). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{R}}(iv_k) &= T(iv_k) \\ &= iT(v_k) \\ &= i(z_{1k} v_1 + ... + z_{nk} v_n) \\ &= (-b_{1k})v_1 + ... + (-b_{nk})v_n + a_{1k}(iv_1) + ... + a_{nk}(iv_n). \end{aligned}$$

Logo

$$[T_{\mathbb{R}}]_{\widetilde{\beta}} = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right].$$

(2,5) 3. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear sobrejetiva entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Mostre que existe uma transformação linear injetiva $\widetilde{T} : W \to V$ tal que $T \circ \widetilde{T} = \mathrm{Id}_W$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para uma transformação linear injetiva $T : V \to W$.

Solução: Seja $(w_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma base de W. Como T é sobrejetiva, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $v_\lambda \in V$ tal que $T(v_\lambda) = w_\lambda$. Defina $\widetilde{T} : W \to V$ como a única transformação linear tal que $\widetilde{T}(w_\lambda) = v_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Assim, $\widetilde{T}$ está completamente determinada e por definição satisfaz $(T \circ \widetilde{T})(w_\lambda) = T(\widetilde{T}(w_\lambda)) = T(v_\lambda) = w_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Portanto $T \circ \widetilde{T}$ e Id_W coincidem em uma base de W e assim $T \circ \widetilde{T} = \mathrm{Id}_W$. Para ver que $\widetilde{T}$ é injetiva, note que se $\widetilde{T}(w) = 0$, então $w = \mathrm{Id}_W(w) = T(\widetilde{T}(w)) = T(0) = 0$, logo $w = 0$.

Suponha agora que $T : V \to W$ seja uma transformação linear injetiva. Afirmamos que existe uma transformação linear sobrejetiva $\widetilde{T} : W \to V$ tal que $\widetilde{T} \circ T = \mathrm{Id}_V$. Seja $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma base de V. Como T é injetiva, o conjunto $(T(v_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \subset W$ é linearmente independente. Completamos esse conjunto para uma base de W consistindo de vetores $\{T(v_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{w_\mu\}_{\mu \in M}$. Definimos $\widetilde{T} : W \to V$ como a única transformação linear tal que $\widetilde{T}(T(v_\lambda)) = v_\lambda$ e $\widetilde{T}(w_\mu) = 0$ para todos $\lambda \in \Lambda$ e $\mu \in M$. Assim $\widetilde{T}$ está completamente definida e por definição satisfaz $(\widetilde{T} \circ T)(v_\lambda) = v_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Como $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é base de V, segue que $\widetilde{T} \circ T = \mathrm{Id}_V$. Para ver que $\widetilde{T}$ é sobrejetiva, seja $v \in V$ e note que por construção de $\widetilde{T}$, temos que $v = \widetilde{T}(T(v))$, logo $v \in \mathrm{Im}(\widetilde{T})$.

(2,5) 4. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n, $\beta = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ uma base ordenada de V e $b : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma $\mathbb{K}$-bilinear.

(1,0) a) Mostre que para todos $u, v \in V$ vale

$$b(u, v) = [u]_\beta^t \mathbf{B} [v]_\beta,$$

onde $\mathbf{B} := (b_{ij})$ com $b_{ij} := b(v_i, v_j)$ para $i, j \in \{1, ..., n\}$.

(1,5) b) Seja $b^{\#} : V \to V^*$ a aplicação (linear) definida por

$$[b^{\#}(u)](v) := b(u, v).$$

Definimos o núcleo da forma bilinear b como Ker $b :=$ Ker $b^{\#}$. Dizemos que b é **não-degenerada** se Ker $b = \{0\}$. Mostre que b é não-degenerada se, e somente se, $\det \mathbf{B} \neq 0$.

Solução:

a) Escreva $u = c_1 v_1 + ... + c_n v_n$ e $v = d_1 v_1 + ... + d_n v_n$. Daí,

$$[u]_\beta^t \mathbf{B} [v]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c_i b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n c_i b_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

e portanto

$$[u]_\beta^t \mathbf{B} [v]_\beta = \sum_{i,j=1}^n c_i d_j b_{ij} = \sum_{i,j=1}^n c_i d_j b(v_i, v_j).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i, \sum_{j=1}^n d_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i b\left(v_i, \sum_{j=1}^n d_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{j=1}^n d_j b(v_i, v_j)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_i d_j b(v_i, v_j). \end{aligned}$$

b) Seja $\beta^* = \langle v^1, ..., v^n \rangle$ a base dual de β. Para cada $i = 1, ..., n$ escreva

$$b^{\#}(v_i) = \alpha_{1i} v^1 + ... + \alpha_{ni} v^n.$$

Por definição de $b^{\#}$ e de base dual, temos que para cada $j = 1, ..., n$ vale

$$[b^{\#}(v_i)](v_j) = (\alpha_{1i} v^1 + ... + \alpha_{in} v^n)(v_j) = \alpha_{ji}.$$

Logo,

$$b(v_i, v_j) = [b^{\#}(v_i)](v_j) = \alpha_{ji},$$

e portanto $[b^{\#}]_\beta^{\beta^*} = \mathbf{B}^t$. Como $\dim V = \dim V^*$, segue que $b^{\#}$ é isomorfismo se, e somente se, $\mathbf{B}^t$ é invertível, ou seja, se, e somente, $\det \mathbf{B}^t = \det \mathbf{B} \neq 0$.