# Curso de Verão de Álgebra Linear
# Parte 2 - Aula 08

Cleber Barreto dos Santos

10 de fevereiro de 2020

**Definição 1.** Seja $V$ um espaço vetorial real ou complexo. Uma **forma (sesquilinear)** em $V$ é uma função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

**(1)** $f(\alpha u + v, w) = \alpha f(u, w) + f(v, w)$;

**(2)** $f(u, \alpha v + w) = \overline{\alpha} f(u, v) = f(u, w)$.

**Definição 2.** Seja $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $f$ uma forma sesquilinear. Diremos que $f$ é uma **forma bilinear**.

**Teorema 3.** Seja $V$ um espaço de dimensão finita com produto interno e seja $f$ uma forma em $V$. Então existe um único operador linear $T$ em $V$ tal que

$$f(v, w) = \langle T(v), w\rangle$$

para quaisquer $v, w \in V$. A aplicação $f \longmapsto T$ é um isomorfismo do espaço de formas em $V$ em $\mathcal{L}(V, V)$.

*Demonstração.* Seja $w \in V$ um vetor. Então a aplicação $v \longmapsto f(v, w)$ é um funcional linear. Logo existe um único vetor $w' \in V$ tal que $f(v, w) = \langle v, w'\rangle$ para qualquer $v \in V$. Assim definimos uma função $U : V \longrightarrow V$ através de $U(w) = w'$. Então

$$\begin{aligned} f(v, \alpha w_1 + w_2) &= \langle v, U(\alpha w_1 + w_2)\rangle \\ &= \overline{\alpha} f(v, w_1) + f(v, w_2) \\ &= \overline{\alpha}\langle v, U(w_1)\rangle + \langle v, U(w_2)\rangle \\ &= \langle v, \alpha U(w_1) + U(w_2)\rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $v, w_1, w_2 \in V$ e escalares em $\mathbb{K}$. Então $U$ é um operador linear em $V$ e seja $T = U^*$ é um operador tal que $f(v, w) = \langle T(v), w\rangle$. Segue que $f(v, w) = \langle T(v), w\rangle$.
Além disso, vemos que se $f(v, w) = \langle T'(v), w\rangle$ para qualquer $w \in V$ então $T' = T$. A associação entre os operadores bilineares e as formas bilineares em $V$ é linear. $\square$

**Definição 4.** Se $f$ é uma forma e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ordenada de $V$, a matriz $A$ de entradas $A_{jk} = f(v_k, v_j)$ é chamada de **matriz de $f$ na base ordenada $\mathcal{B}$**.

**Definição 5.** Uma forma em $V$ é dita **Hermitiana** se para quaisquer $v, w \in V$ temos que $f(v, w) = \overline{f(w, v)}$.

**Teorema 6.** Seja $V$ um espaço vetorial complexo e $f$ uma forma em $V$ tal que $f(v, v)$ é real para cada $v \in V$. Então $f$ é Hermitiana;.

*Demonstração.* Sejam $v, w \in V$. Queremos verificar $f(v, w) = \overline{f(w, v)}$. Veja que

$$f(v + w, v + w) = f(v, v) + f(v, w) + f(w, v) + f(w, w).$$

Como $f(v + w, v + w) = f(v, v), f(w, w)$ são números reais, temos que $f(v, w) + f(w, v)$ é um número real. Fazendo o mesmo raciocínio para $v + iw$ no lugar de $v + w$. Com as informações acima obtemos que $f(v, w) = \overline{f(w, v)}$. □

**Corolário 7.** Seja $T$ um operador linear em um espaço vetorial complexo $V$ de dimensão finita. Então $T$ é auto-adjunto se, e somente se, $\langle T(v), v\rangle$ é real para cada $v \in V$.

**Definição 8.** Uma forma $f$ em um espaço vetorial real ou complexo $V$ é:

**(1)** **não-negativa** se $f(v, v) \geqslant 0$ para cada $v \in V$;

**(2)** **positiva** se $f(v, v) > 0$ para cada $v \neq 0$;

**(3)** **não-positiva** se $f(v, v) \leqslant 0$ para cada $v \in V$;

**(4)** **negativa** se $f(v, v) < 0$ para cada $v \neq 0$.

**Definição 9.** Seja $V$ um espaço vetorial e $f$ uma forma bilinear em $V$. Dizemos que:

**(1)** $f$ é **alternada** se $f(v, v) = 0$ para cada $v \in V$;

**(2)** $f$ é **antissimétrica** se $f(u, v) = -f(v, u)$ para quaisquer $u, v \in V$;

**(3)** $f$ é **simétrica** se $f(u, v) = f(v, u)$ para quaisquer $u, v \in V$

# Exercícios - 10 de fevereiro de 2020

**Exercício 1.** Seja $V = \mathbb{C}^2$ e sejam $v = (x_1, x_2), w = (y_1, y_2) \in V$ Identifique quais funções definidas abaixo são formas (sesquilineares) em $V$.

**(1)** $f(v, w) = 1$.

**(2)** $f(v, w) = (x_1 - \overline{y_1})^2 + x_2\overline{y_2}$

**(3)** $f(v, w) = (x_1 + \overline{y_1})^2 - (x_1 - \overline{y_1})^2$.

**(4)** $f(v, w) = x_1\overline{y_2} - \overline{x_2}y_1$.

**Exercício 2.** Seja $f$ a forma em $\mathbb{R}^2$ definida por

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Encontre a matriz de $f$ em cada uma das seguintes bases:

**(1)** $\{(1, 0); (0, 1)\}$;

**(2)** $\{(1, -1); (1, 1)\}$;

**(3)** $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

**Exercício 3.** Seja $f$ a forma em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

Encontre uma base ordenada de $V$ na qual $f$ que é representada por uma matriz diagonal.

**Exercício 4.** Dizemos que uma forma $f$ em um espaço vetorial $V$ é **não-degenerada** se

$$f(v, w) = 0,\ \forall w \in V \Leftarrow v = 0.$$

Mostre que $f$ é não-degenerada se, e somente se, o operador $T$ (que é o operador tal que $f(v, w) = \langle T(v), w$ para quaisquer $v, w \in V$) é não-singular.

**Exercício 5.** Seja $A$ uma matriz complexa quadrada não-singular. Mostre que $H = A^*A$ é Hermitiana e positiva definida.