Curso de Verão de Álgebra Linear
Parte 2 - Aula 07

Cleber Barreto dos Santos

10 de fevereiro de 2020

Teorema 1. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja f um funcional linear em V. Então existe um único vetor $v \in V$ tal que $f(w) = \langle w, v\rangle$ para cada $w \in V$.

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Seja $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \overline{f(v_j)} v_j$. Se g o funcional linear definido por $g(w) = \langle w, v\rangle$ temos que

$$g(v_k) = \langle v_k, v\rangle = \left\langle v_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{f(v_j)} v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\langle v_k, v_j\rangle = f(v_k).$$

Logo $g(v_k) = f(v_k)$ para qualquer elemento da base de V e segue que $f(w) = \langle w, v\rangle$. □

Teorema 2. Seja T um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita. Então existe um único operador linear T^* em V tal que

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle \text{ para quaisquer } u, v \in V.$$

Demonstração. Seja $w \in V$. Então $v \longmapsto \langle T(v), w\rangle$ é um funcional linear em V. Então existe um único vetor $w^* \in V$, para o qual $\langle T(v), w\rangle = \langle v, w^*\rangle$. Seja $T^* : V \longrightarrow V$ a função definida por $T(w) = w^*$. Temos que T^* é linear uma vez que

$$\begin{aligned}
\langle v, T^*(\alpha w_1 + w_2)\rangle &= \langle T(v), \alpha w_1 + w_2\rangle \\
&= \langle T(v), \alpha w_1\rangle + \langle T(v), w_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle T(v), w_1\rangle + \langle T(v), w_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle v, T^*(w_1)\rangle + \langle v, T^*(w_2)\rangle \\
&= \langle v, \alpha T^*(w_1)\rangle + \langle v, T^*(w_2)\rangle \\
&= \langle v, \alpha T^*(w_1) + T^*(w_2)\rangle
\end{aligned}$$

para qualquer $v \in V$. Então $T^*(\alpha w_1 + w_2) = \alpha T^*(w_1) + T^*(w_2)$. Portanto T^* é linear. A unicidade de T^* é imediata. □

Teorema 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada ortonormal de V. Seja T um operador linear em V e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Então $A_{jk} = \langle T(v_k), v_j\rangle$. Em particular a matriz de T^* é conjugada a transposta da matriz de T.

Demonstração. Como $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal temos que $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j$. Logo $T(v_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{jk} v_j$ e como $T(v_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle T(v_k), v_j\rangle v_j$, por unicidade temos que $A_{jk} = \langle T(v_k), v_j\rangle$.

Sejam $A = [T]_{\mathcal{B}}$ e $B = [T^*]_{\mathcal{B}}$. Temos que $A_{jk} = \langle T(v_k), v_j\rangle$ e $B_{jk} = \langle T^*(v_k), v_j\rangle$. Pela definição de T^* temos que
$$B_{jk} = \langle T^* v_k, v_j\rangle = \overline{\langle v_j, T^* v_k\rangle} = \overline{\langle T(v_j), v_k\rangle} = \overline{A_{kj}}.$$
□

Definição 4. Seja T um operador linear em um espaço com produto interno V. Então dizemos que T **possui uma adjunto em** V se existe um operador T^* em V tal que $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$ para quaisquer $v, w \in V$. Neste caso, o operador T^* é chamado de operador **adjunto** de T.

Teorema 5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se T e U são operadores lineares em V e c um escalar então:

(1) $(T + U)^* = T^* + U^*$;

(2) $(cT)^* = \overline{c}T^*$;

(3) $(TU)^* = U^*T^*$;

(4) $(T^*)^* = T$.

Demonstração. Mostraremos apenas o item **(1)**. Temos para quaisquer vetores $v, w \in V$ que:

$$\begin{aligned}
\langle (T + U)v, w\rangle &= \langle T(v) + U(v), w\rangle \\
&= \langle T(v), w\rangle + \langle U(v), w\rangle \\
&= \langle v, T^*(w)\rangle + \langle v, U^*(w)\rangle \\
&= \langle v, T^*(w) + U^*(w)\rangle \\
&= \langle v, (T^* + U^*)(w)\rangle.
\end{aligned}$$

Por unicidade, segue que $(T+U)^* = T^*+U^*$. Os demais itens serão deixados como exercício. □

Definição 6. Um operador linear T tal que $T = T^*$ é chamado **auto-adjunto** se $T = T^*$.

Definição 7. Sejam V e W são espaços com produto interno sobre o mesmo corpo e seja T uma transformação linear de V para W. Dizemos que T **preserva produtos internos** se $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para quaisquer $v, w \in V$. Um **isomorfismo** de V para W é um isomorfismo de espaços vetoriais de V para W que preserva produtos internos.

Observação 8. Sejam $v, w \in V$ vetores quaisquer. No caso real temos que
$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2.$$
No caso complexo temos que
$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2 + \frac{i}{4}\|v + iw\|^2 - \frac{i}{4}\|v - iw\|^2.$$

Teorema 9. Sejam V e W espaços com produto interno sobre o mesmo corpo, e seja T uma transformação linear de V para W. Então T preserva produtos internos se, e somente se, $\|T(v)\| = \|v\|$ para cada $v \in V$.

Demonstração. Se T preserva produtos internos então T preserva normas. Se $\|T(v)\| = \|v\|$ as identidades de polarização mostram que $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para quaisquer $v, w \in V$. A recíproca é evidente. □

Definição 10. Um **operador unitário** em um espaço com produto interno é um isomorfismo de um espaço nele mesmo.

Teorema 11. Seja U um operador linear em um espaço com produto interno V. Então U é unitário se, e somente se, então a adjunta U^* de U existe e $UU^* = U^*U = 1$

Demonstração. Suponha que U seja um operador unitário. Então existe U^{-1} e logo para quaisquer $v, w \in V$ temos que
$$\langle U(v), w\rangle = \langle U(v), UU^{-1}(w)\rangle = \langle v, U^{-1}(w)\rangle.$$
Por unicidade temos que $U^{-1} = U^*$.
Suponha agora que $UU^* = U^*U = I$. Então U é invertível e $U^{-1} = U^*$. Logo
$$\langle U(v), U(w)\rangle = \langle v, U^*U(w)\rangle = \langle u, w\rangle$$
para quaisquer $v, w \in V$. □

Definição 12. Uma matriz complexa A é chamada **unitária** se $A^*A = I$.

Teorema 13. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e U um operador linear em V. Então U é unitário se, e somente se, a matriz de U em alguma (ou em toda) base ordenada ortonormal é uma matriz unitária.

Demonstração. Imediato. □

Definição 14. Uma matriz real ou complexa A é dita **ortogonal** se $A^tA = I$.

Definição 15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja T um operador linear em V. Dizemos que T é **normal** se comuta com a sua adjunta e $TT^* = T^*T$.

Teorema 16. Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja T um operador linear auto-adjunto em V. Então cada autovalor de T é real, e os autovetores de T a autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração. Suponha que λ seja um autovalor de T Logo
$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$
Suponha agora que $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \mu w$ com $\lambda \neq \mu$. Logo
$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \overline{\mu}\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$
Logo $\langle v, w\rangle = 0$. □

Teorema 17. Seja um espaço vetorial de dimensão positiva com produto interno, então cada operador auto-adjunto possui autovetor não-nulo.

Teorema 18. Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e seja T um operador linear em V. Suponha que W é um subespaço de V que é invariante por T. Então o complemento ortogonal de W é invariante por T^*.

Teorema 19. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, e seja T um operador linear auto-adjunto em V. Então exoste uma base ortonormal para V em que cada vetor é autovetor de T.

Teorema 20. Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Sejam T um operador linear em V e $v \in V$. Então $T(v) = \lambda v$ se, e somente se, $T^*(v) = \overline{\lambda}v$.

Exercícios - 10 de fevereiro de 2020

Exercício 1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $T, U : V \longrightarrow V$ operadores lineares em V e c um escalar. Mostre que:

(1) $(cT)^* = \overline{c}T^*$;

(2) $(TU)^* = U^*T^*$;

(3) $(T^*)^* = T$.

Exercício 2. Seja $V = \mathbb{C}^2$ com o produto interno canônico. Seja T o operador linear definido por $Te_1 = (1, -2)$ e $Te_2 = (i, -1)$. Se $v = (x_1, x_2)$ encontre $T^*(v)$.

Exercício 3. Sejam V um espaço com produto interno de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear invertível. Mostre que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Exercício 4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Mostre que $\mathsf{Im}(T^*) = Ker(T)^{\perp}$.

Exercício 5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se E é um operador linear em V que é uma projeção, mostre que $E^2 = E$. Mostre que E é auto-adjunto se, e somente se, $EE^* = E^*E$.

Exercício 6. Considere a rotação R_θ em $\mathbb{R}^2$ por ângulo θ em torno da origem no sentido anti-horário. Calcule $R_\theta R_\gamma$. Mostre que $R_\theta^* = R_{-\theta}$ e conclua que R_θ é um operador unitário.

Exercício 7. Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno e T um operador linear auto-adjunto. Mostre que

(1) $\|v + iT(v)\| = \|v - iT(v)\|$ para cada $v \in V$;

(2) $v + iT(v) = w + iT(v)$ se, e somente se, $v = w$;

(3) $I + iT$ é não-singular;

(4) $I - iI$ é não-singular;

(5) Suponha que V possui dimensão finita. Mostre qyue $U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$.

Exercício 8. Mostre que um operador normal e nilpotente é nulo.

Exercício 9. Se T é um operador normal, mostre que todos os autovetores de T associados a autovalores distintos são ortogonais.

Exercício 10. Seja $V = \mathbb{C}^2$ o espaço vetorial com o produto interno canônico. Seja T um operador linear em V cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é normal e encontre uma base de V consistinto de autovetores de T.

Exercício 11. Mostre que o produto de dois operadores lineares auto-adjuntos é auto-adjunto se, e somente se, esses dois operadores comutam.