CURSO DE VERÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

PARTE 2 - AULA 04

TEOREMA (CAYLEY-HAMILTON): Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita. Então o polinômio minimal de T divide o polinômio característico de T, ou seja, $p_T(T) = 0$.

LEMA 2: Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear em um espaço vetorial V cujo polinômio minimal seja $q_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$. Seja $W \subseteq V$ um subespaço próprio de V invariante por T. Então existe um vetor $v \in V$ tal que:

(1) $v \notin W$;

(2) existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $(T - \lambda_j I)(v) \in W$.

Demonstração: OBSERVAÇÃO: (1) e (2) indicam que o polinômio T-condutor de v em W é linear.

Seja $u \in V$ um vetor qualquer tal que $u \notin W$.
Seja $g \in \mathbb{K}[x]$ o polinômio T-condutor de u em W.
isto é, o polinômio mônico de menor grau que satisfaz

$$g(T)(u) \in W.$$

Logo g divide q_T, pois $q_T(T)(u) = 0$ $(q_T(T) = 0)$.
Como $u \notin W$, o polinômio g é não constante (de fato, se $g(x) = b$ fosse constante teríamos que $g(T)(u) = bu \in W$, i.e., $u \in W$, o que contradiz a hipótese $u \notin W$).
Como g é não constante, divide q_T e $q_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$ existem $c_1, c_2, \dots, c_k$ inteiros não-negativos tais que

$$g(x) = (x-\lambda_1)^{c_1}(x-\lambda_2)^{c_2}\cdots(x-\lambda_k)^{c_k},$$

com algum $c_j \neq 0$.
Temos então que $g(x) = (x-\lambda_j)h(x)$, pois $c_j \geq 1$.
Logo $v = h(T)(u) \notin W$ pois h divide g e g é o polinômio de menor grau para o qual $g(T)(u) \in W$. (lembre que g é o gerador de $S_T(u, W)$.) Também temos que

$$(T - \lambda_j I)(v) = (T - \lambda_j I)h(T)(u) = g(T)(u) \in W. \qquad \square$$

DEFINIÇÃO 3: Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear em um espaço vetorial V. Dizemos que o operador $T: V \longrightarrow V$ é triangularizável se existe uma base ordenada $\mathcal{B}$ para a qual a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja triangular (superior).

TEOREMA 4: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T: V \longrightarrow V$. Então T é triangularizável se, e somente se, q_T é produto de fatores lineares.

Demonstração: Se T é triangularizável, então existe uma base $\mathcal{B}$ na qual a matriz $A = (a_{ij}) = [T]_{\mathcal{B}}$ é triangular superior. Logo

$$p_T(x) = \det(xI - T) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}).$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton segue que $q_T(x)$ é produto de fatores lineares pois $q_T(x)$ divide $p_T(x)$

Por outro lado, suponhamos que $q_T(x)$ seja produto de fatores lineares da forma

$$q_T(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \cdots (x - \alpha_k)^{r_k}.$$

Aplicando o lema anterior ao subespaço $W_0 = \{0\}$ encontramos $v_1 \in V$ tal que $v_1 \notin W_0 = \{0\}$ e $(T - \lambda_{j_1} I)(v_1) \in W_0 = \{0\}$ para algum autovalor λ_{j_1}. Logo $v_1 \neq 0$ e $T(v_1) = \lambda_{j_1} v_1$.

Considerando $W_1 = \text{span}(v_1)$, existe $v_2 \notin W_1$ tal que $(T - \lambda_{j_2} I)(v_2) \in W_1$ ou seja, $v_2 \neq \lambda v_1$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T(v_2) = a_{12} v_1 + \lambda_{j_2} v_2$ para algum $a_{12} \in \mathbb{K}$. Recursivamente construímos

$v_{\ell+1} \notin W_\ell = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_\ell\}$ e existem escalares

$a_{1,\ell+1}, a_{2,\ell+1}, \ldots, a_{j,\ell+1} \in \mathbb{K}$ e $\lambda_{j_{\ell+1}} \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(v_{\ell+1}) = a_{1,\ell+1} v_1 + a_{2,\ell+1} v_2 + \cdots + a_{\ell,\ell+1} v_\ell + \lambda_{j_{\ell+1}} v_{\ell+1}.$$

Verifique que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathcal{B}$.

Desta forma, temos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_{j_1} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_{j_2} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_{j_3} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{j_n} \end{bmatrix}$$

Portanto T é triangularizável. $\square$

COROLÁRIO 5: Se V é um espaço vetorial sobre um corpo algebricamente fechado então todo operador linear em V é triangularizável.

Demonstração: Segue diretamente do fato de que todo polinômio com coeficientes ~~lineares~~ em um corpo algebricamente fechado é produto de fatores lineares.

$\square$

TEOREMA 6: Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita V. Então T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio q_T é da forma

$$q_T(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores distintos de T.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se T é diagonalizável, $p_T(x)$ é produto de fatores lineares. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos também que $q_T(x)$ é produto de fatores lineares. Podemos escolher uma base $\mathcal{B}$ para a qual

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ \hline & & & & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{array}\right]$$

É fácil ver que o polinômio $q(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ anula T. Como cada λ_j é raiz de $q_T(x)$. Portanto $q_T = q$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $q_T(x)$ seja produto de fatores lineares distintos:
$q_T(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ com $\lambda_j \neq \lambda_i$ se $j \neq i$.

Considere $W = \sum_{j=1}^{k} Aut_T(\lambda_j)$ um subespaço de V.

Se $W = V$ então já vimos que T é diagonalizável.

Suponhamos por absurdo que $W \subsetneq V$ seja subespaço próprio.

Pelo lema anterior existe $v \in V$ tal que $v \notin W$ e $w = (T - \lambda_s I)(v) \in W$, para algum $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Temos que $q_T(x) = (x-\lambda_s)\, q(x)$.

Defina o polinômio $r(x) = q(x) - q(\lambda_s)$.

Como $r(\lambda_s) = 0$, temos que $r(x) = (x-\lambda_s)\, h(x)$ para algum polinômio $h(x)$.

Veja que existem $w_j \in Aut_T(\lambda_j)$ tais que
$W \ni w = (T - \lambda_s I)(v) = w_1 + w_2 + \cdots + w_k$.

Lembre que se $p \in \mathbb{K}[x]$ é um polinômio e $u \in V$ é autovetor associado ao autovalor λ temos que $p(T)(u) = p(\lambda)\, u$.

Logo $h(T)(w) = h(T)(w_1 + w_2 + \cdots + w_k)$

$$= h(T)(w_1) + h(T)(w_2) + \cdots + h(T)(w_k)$$

$$= h(\lambda_1) w_1 + h(\lambda_2) w_2 + \cdots + h(\lambda_k) w_k \in W.$$

Veja que

$$q(T)(v) - q(\lambda_s)(v) = (q(T) - q(\lambda_s))(v)$$
$$= h(T)(T - \lambda_s I)(v)$$
$$= h(T)(w) \in W.$$

$q(x) - q(\lambda_s) = (x - \lambda_s) h(x)$.

$w = (T - \lambda_s I)(v)$

Temos que $0 = q_T(T)(v) = (T - \lambda_s I) q(T)(v)$.

Logo $q(T)(v) \in$ ~~Aut~~ $Ker(T - \lambda_s I) = Aut_T(\lambda_s) \subseteq W$.

Portanto $q(\lambda_s)(v) = q(T)(v) - h(T)(w) \in W$.

Se $q(\lambda_s) \neq 0$ temos que

$$v = \frac{1}{q(\lambda_s)} \underbrace{q(\lambda_s)\, v}_{\in W} \in W$$, o que não ocorre.

Logo $q(\lambda_s) = 0$. Como λ_s é raiz de q existe $m(x) \in \mathbb{K}[x]$, tal que $q(x) = (x - \lambda_s) m(x)$. Portanto:

$$q_T(x) = (x - \lambda_s) q(x)$$
$$= (x - \lambda_s)(x - \lambda_s) m(x)$$

o que contradiz o fato de q_T ser produto de fatores lineares distintos.

$\square$

TEOREMA 7 (DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA): Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita. Seja q_T o polinômio minimal de T:

$$q_T = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

onde os polinômios em $\mathbb{K}[x]$ são distintos e r_j são inteiros positivos. Sejam $W_j = Ker(p_j(T))^{r_j}$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Então:

(1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$;

(2) cada W_j é invariante por T;

(3) se T_j é o operador linear induzido ~~por~~ em W_j por T, o polinômio minimal de T é $p_j^{r_j}$.

Demonstração: Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ defina o polinômio

$$f_j = \frac{q_T}{p_j^{r_j}} = \prod_{i \neq j} p_i^{r_i}.$$

Como todos os polinômios são primos e distintos, pelo Teorema de Bézout existem $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathbb{K}[x]$ tais que

$$\sum_{j=1}^{k} f_j g_j = f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_k g_k = 1.$$

Observe que f_if_j é divisível por $p_j^{r_j}$ se $i \neq j$, pois $p_j^{r_j}$ divide f_i.

Vamos definir $h_j \doteq f_j g_j$. Desta forma $h_1 + h_2 + \cdots + h_k = 1$.

Definimos $E_j = h_j(T) = f_j(T)\, g_j(T)$.

Logo
$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + \cdots + E_k &= h_1(T) + h_2(T) + \cdots + h_k(T) \\ &= (h_1 + h_2 + \cdots + h_k)(T) \\ &= 1(T) = I \end{aligned}$$

e $E_iE_j = h_i(T)\, h_j(T) = f_i(T) g_i(T) f_j(T) g_j(T) = (f_if_j)(T)\, g_i(T) g_j(T)$

como $p_j^{r_j}$ divide f_if_j para cada $i \neq j$ e $p_i^{r_i}$ divide f_j temos que cada $p_l^{r_l}$ divide f_if_j para cada $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, temos que existe $m(x) \in \mathbb{K}[x]$ para o qual

$$f_if_j = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} m = q_T \cdot m.$$

donde $f_i(T) f_j(T) = q_T(T) \cdot m(T) = 0 \cdot m(T) = 0$.

Portanto $E_iE_j = (f_if_j)(T)\, g_i(T) g_j(T) = 0$.

Logo
$$\begin{aligned} E_i = E_i \cdot I &= E_i \cdot (E_1 + E_2 + \cdots + E_k) \\ &= E_iE_1 + E_iE_2 + \cdots + E_iE_k \\ &= E_iE_i \end{aligned}$$

$E_iE_j = 0$ se $i \neq j$.

Portanto cada E_j é uma projeção de V em algum subespaço U_j.

Mostraremos que $U_j = W_j$.

Observe que a condição $E_1 + E_2 + \cdots + E_k = I$ implica em $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k = I$.

* $U_j = Im(E_j) \subseteq W_j$. $\left(W_j = Ker\left(p_j(T)\right)^{r_j}\right)$

seja $v \in Im(E_j)$ e logo

$$p_j(T)^{r_j}(v) = p_j(T)^{r_j} \cdot E_j(v) = p_j(T)^{r_j} f_j g_j(T)(v) = 0$$

$v = E_j(v)$ pois $v \in Im(E_j)$ e $E_j^2 = E_j$.

q_T divide $p_j^{r_j} f_j g_j$. uma vez que ~~$q_T = p_j^{r_j}$~~ $q_T = f_j \cdot p_j^{r_j}$.

* $W_j \subseteq U_j$

seja $v \in Ker\left(p_j(T)^{r_j}\right)$

Veja que f_ig_i é divisível por $p_j^{r_j}$ e logo

$$f_ig_i(T)(v) = (s \cdot p_j^{r_j})(T)(v) = s(T)\, \underbrace{p_j^{r_j}(T)(v)}_{=0} = 0$$

pois $p_j^{r_j}(T)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in Ker\, p_j^{r_j}(T)$

Logo $E_i(v) = f_i(T) g_i(T)(v) = (f_ig_i)(T)(v) = 0$.

Portanto $v = I(v)$

$= (E_1 + E_2 + \cdots + E_k)(v)$ — $E_1 + E_2 + \cdots + E_k = I$

$= E_1(v) + E_2(v) + \cdots + E_k(v)$ — soma de aplicações lineares

$= E_j(v)$.

Logo $v \in Im(E_j) = U_j$.

* Portanto $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.

* Temos que $T(W_j) \subseteq W_j$.

De fato, seja $w_j \in W_j = Ker(p_j^{r_j}(T))$. Logo $p_j^{r_j}(T)(w_j) = 0$.

Portanto $p_j^{r_j}(T)\left(T(w_j)\right) = T\left(p_j^{r_j}(T)(w)\right) = T(0) = 0$.

é válido pois T comuta com $p_j^{r_j}(T)$, uma vez que $p_j^{r_j}$ é polinômio.

i.e., $T(w_j) \in Ker\, p_j^{r_j}(T) = W_j$.

* Basta observar que se $\mathcal{B}_j$ é base de W_j, então para $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ temos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T|_{W_2}]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T|_{W_k}]_{\mathcal{B}_k} \end{bmatrix}.$$

$\square$