Curso de Verão de Álgebra Linear
Parte 2 - Aula 02

Cleber Barreto dos Santos

29 de janeiro de 2020

Definição 1. Seja V um espaço vetorial e T um operador linear em V. Se W é um subespaço de V, dizemos que W é **invariante** por T se $T(W) \subseteq W$.

Exemplo 2. Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear no espaço vetorial V então $\mathsf{Ker}(T)$ e $\mathsf{Im}(T)$ são subespaços invariantes por T.

Exemplo 3. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V com autovalor λ. Então $\mathsf{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço invariante por T.

Exemplo 4. Seja $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o operador derivação no espaço das funções infinitamente deriváveis. Então o subespaço vetorial $\mathbb{K}[x]$ dos polinômios de grau arbitrário é um subespaço invariante por D.

Exemplo 5. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V. Seja U um operador linear tal que $TU = UT$. Sejam $W = \mathsf{Im}(U)$ e $N = \mathsf{Ker}(U)$. Então W e N são invariantes por T.

Exemplo 6. Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação em torno da origem de $\mathbb{R}^2$ por um ângulo $0 < \theta < \pi$. Seja W um subespaço invariante de $\mathbb{R}^2$. Então $W = 0$ ou $W = \mathbb{R}^2$.

Definição 7. Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V. Suponhamos que W seja um subespaço invariante por T. Então o operador $T|_W : W \longrightarrow W$ dado por $T|_W(w) = T(w)$ para cada $w \in W$ é chamado de **operador restrição de T a W**.

Observação 8. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V e seja W um subespaço invariante por T. Então existe uma base $\mathcal{B}$ de V para a qual a matriz de T é representada por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Lema 9. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V e seja W um subespaço invariante por T. Então temos que o polinômio $p_{T|_W}(x)$ divide o polinômio $p_T(x)$. Além disso, se f é um polinômio que anula T, então f anula $T|_W$.

Demonstração. De fato, se $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ é uma base de V onde $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é uma base de W então $[T]_{\mathbb{B}}$ é uma matriz diagonal por blocos onde $p_T(x) = \det(xI - T) = \det(xI - T|_W)\, q(x)$. De forma análoga, mostra-se que se $f(T) = 0$ então $f(T|_W) = 0$ para qualquer polinômio $f(x)$. $\square$

Exemplo 10. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V com autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Seja $W = \mathsf{Aut}_T(\lambda_1) + \mathsf{Aut}_T(\lambda_2) + \cdots + \mathsf{Aut}_T(\lambda_k)$. Então $p_{T|_W}(x) = (x-\lambda_1)^{\mathsf{mg}(\lambda_1)}(x-\lambda_2)^{\mathsf{mg}(\lambda_2)} \cdots (x-\lambda_k)^{\mathsf{mg}(\lambda_k)}$.

Definição 11. Seja W um subespaço invariante para o operador linear $T : V \longrightarrow V$ e seja $v \in V$. O **T-condutor de v em W** é o conjunto $S_T(v, W)$ formado por todos os polinômios g tais que $g(T)(v) \in W$. Em particular, se $W = 0$, dizemos que $S_T(v, W)$ é o **T-anulador de** v.

Lema 12. Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V e W um subespaço vetorial invariante por T. Então W é invariante por qualquer polinômio aplicado em T. Em particular, para cada $v \in V$, $S_T(v, W)$ é um ideal da álgebra de polinômios $\mathbb{K}[x]$.

Demonstração. De fato, recursivamente temos que $T^n(W) \subseteq W$ para cada inteiro $n \geqslant 0$. Segue disto que W é invariante sob a aplicação de qualquer operador obtido a partir da aplicação de um polinômio a T.
Se $f, g \in S_T(v, W)$ então $f(T)(v), g(T)(v) \in W$ e logo $(f_g)(T)(v) = f(T)(v) + g(T)(v) \in W$. Seja agora $f \in S_T(v, W)$ e $h \in \mathbb{K}[x]$ qualquer. Logo $(hf)(T)(v) = h(T)f(T)(v) = h(T)(w) \in W$ pois $w = f(T)(v) \in W$ por definição. Portanto $S_T(v, W)$ é um ideal de $\mathbb{K}[x]$. □

Observação 13. Cada ideal em $\mathbb{K}[x]$ é gerado por um único polinômio mônico.

Definição 14. Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial V e W um subespaço de V invariante por T. Diremos que o polinômio gerador de $S_T(v, W)$ é o **T-condutor de α em W.** Se $W = 0$ diremos que esse polinômio é o **T-anulador** de $v \in V$.

Definição 15. Sejam $W_1, W_2, \ldots, W_k$ subespaços de um espaço vetorial v. Dizemos que $W_1, W_2, \ldots, W_k$ são **independentes** se $v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 0$ para cada $v_j \in W_j$ implica em $v_j = 0$.

Exemplo 16. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2. Se os subespaços W_1 e W_2 são independentes e não nulos então $V = W_1 \oplus W_2$.

Lema 17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Sejam $W_1, W_2, \ldots, W_k$ subespaços de V e seja $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $W_1, W_2, \ldots, W_k$ são independentes;

(2) para cada $2 \leqslant j \leqslant k$ temos que $W_j \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}$;

(3) se $\mathcal{B}_j$ é uma base ordenada para W_j então $\mathcal{B} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$ é uma base ordenada de W.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2)**:** Suponhamos que os espaços $W_1, W_2, \ldots, W_k$ sejam independentes. Seja $v \in W_j \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{j-1}$. Logo existem $w_t \in W_t$ tais que $v = w_1 + w_2 + \cdots + w_{j-1}$, ou seja, $w_1 + w_2 + \cdots + w_{j-1} + (-v) = 0$. Pela definição de independência segue que $0 = v = w_1 = w_2 = \cdots = w_j$.

(2) $\Rightarrow$ (1)**:** Suponha que $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 0$ com $v_j \in W_j$. Seja j o maior inteiro tal que $v_j \neq 0$. Logo $0 = v_1 + v_2 + \cdots + v_j = 0$ com $v_j \neq 0$, donde $v_j = -v_1 - v_2 - \cdots - v_{j-1} \in W_j \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{j-1}$. Segue todos os v_i's são nulos.

(1) $\Rightarrow$ (3)**:** Suponha novamente que $W_1, W_2, \ldots, W_k$ sejam independentes e sejam $\mathcal{B}_j$ as bases de W_j e seja $\mathcal{B}$ a união ordenada dessas bases. Toda relação de dependência linear entre vetores de $\mathcal{B}$ tem a forma $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 0$ Segue que cada $v_j = 0$ e olhando para as escritas nas bases, os coeficientes da relação devem ser nulos.

(3) $\Rightarrow$ (1)**:** Sejam $v_j \in W_j$ tais que $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 0$. Como cada $\mathcal{B}_j$ é base podemos escrever $v_j = a_{j,1}v_{j,1} + a_{j,2}v_{j,2} + \cdots + a_{j,n_j}v_{j,n_j}$ onde $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1}, v_{j,2}, \ldots, v_{j,n_j}\}$. Como $\mathcal{B}$ é base, todos os coeficientes tem de ser nulos e segue que $W_1, W_2, \ldots, W_k$ são independentes.
□

Definição 18. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que o operador $E : V \longrightarrow V$ é uma **projeção** se $E^2 = E$.

Lema 19. Seja $E : V \longrightarrow E$ uma projeção em um espaço vetorial V. Temos que $V = \mathsf{Ker}(E) \oplus \mathsf{Im}(E)$.

Demonstração. De fato, seja $v \in \mathsf{Ker}(E) \cap \mathsf{Im}(E)$. Logo $E(v) = 0$ e $v = E(w)$ para algum $w \in V$. Portanto $v = E(w) = E^2(w) = E(E(w)) = E(v) = 0$. Por outro lado, podemos escrever cada vetor v da forma $v = E(v) + (v - E(v))$, o que mostra que $V = \mathsf{Ker}(E) + \mathsf{Im}(E)$. $\square$

Teorema 20. Seja $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots W_k$ um espaço vetorial. Então existem operadores $\mathbb{K}$-lineares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ em V tais que

(1) cada E_j é uma projeção;

(2) $E_iE_j = 0$ para cada $i \neq j$ com $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

(3) $i = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$;

(4) $\mathsf{Im}(E_j) = W_j$.

Demonstração. Como $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots W_k$, dado $v \in V$, existem únicos $w_j \in W_j$ para os quais $v = w_1 + w_2 + \cdots + w_k$. Defina $E_j(v) = w_j$. $\square$

Teorema 21. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no espaço vetorial $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$. Seja E_j a projeção associada a W_j. Então cada W_j é invariante por T se, e somente se, $TE_j = E_jT$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Demonstração. Suponha que T comuta com cada E_j. Seja $v \in W_j$. Então $T(v) = T(E_j(v)) = E_j(T(v))$. Logo $T(v)$ está na imagem de E_j, i.e., $T(W_j) \subseteq W_j$.
Por outro lado, suponhamos que cada W_j seja invariante por T para cada $v \in V$ temos que $T(v) = TE_1(v) + TE_2(v) + \cdots + TE_k(v)$. Como $E_j(v) \in W_j$ que é invariante por T, existe w_j tal que $T(E_j(v)) = E_j(w_j)$. Logo $E_iTE_j(v) = E_iE_j(w_j)$. Segue que $E_jT = TE_j$ $\square$

Teorema 22. Seja T um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita V. Se T é diagonalizável e se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são autovalores distintos para T, então existem operadores lineares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ em V tais que

(1) $T = \lambda_1E_1 + \lambda_2E_2 + \cdots \lambda_kE_k$;

(2) $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$;

(3) $E_iE_j = 0$ para quaisquer $i \neq j$;

(4) $E_i^2 = E_i$;

(5) $\mathsf{Im}(E_i)$ é o autoespaço para T associado ao autovalor λ_i.

Demonstração. Basta observar que, como T é diagonalizável, então $V = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} \mathsf{Aut}_T(\lambda_j)$ $\square$

Exercícios - 29 de janeiro de 2020

No que segue, a menos de menção em contrário, $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita n.

Exercício 1. Se $V_1, V_2 \subseteq V$ são subespaços T-invariantes tais que $V = V_1 \oplus V_2$ então
$$p_T(x) = p_{T|_{V_1}}(x) \cdot p_{T|_{V_1}}(x).$$
Generalize.

Exercício 2. Sejam $W \subseteq V$ um subespaço e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. Mostre que W é $(\lambda I - T)$-invariante se, e somente se, W for T invariante.

Exercício 3. Considere nesse exercício que a dimensão de V possa ser infinita. Seja $\{W_i\}_{i\in I}$ uma família de subespaços de V que são T-invariantes. Mostre que $W = \bigcap_{i\in I} W_i$ é T-invariante. Podemos afirmar que $\bigcup_{i\in I} W_i$ é um subespaço T-invariante?

Exercício 4. Encontre todos os subespaços T-invariantes de $\mathbb{R}^2$ sendo T a transformação dada pela matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
na base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5. Sejam $V_1, V_2 \subseteq V$ subespaços T-invariantes de tais que $V = V_1 \oplus V_2$. Mostre que a aplicação $\tilde{T} : V/V_1 \longrightarrow V/V_1$ dada por $\tilde{T}(v + V_1) = T(v) + V_1$ está bem definida e que é uma transformação linear. Além disso calcule o polinômio característico de $\tilde{T}$.

Exercício 6. Supponha que T seja diagonalizável. Seja $W \subseteq V$ um subespaço T-invariante qualquer. Mostre que a restrição $T|_W$.

Exercício 7. Suponha que a matriz de T na base canônica de $\mathbb{K}^2$ seja
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calcule os subespaços invariantes quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercício 8. Considere $T : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; [0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; [0,1])$ o operador linear no espaço das funções contínuas definido por
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) O espaço das funções polinomiais é invariante por T?

(2) O espaço das funções diferenciáveis é invariante por T?

(3) O espaço das funções que se anulam em $x = 1/2$ é invariante por T?

Exercício 9. Seja $W_1 \subseteq V$ um subespaço de V. Prove que existe uum subespaço W_2 de V para o qual $V = W_1 \oplus W_2$.

Exercício 10. Suponha que T seja uma projeção. Encontre todos os autovalores de T.

Exercício 11. Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ operadores em V tais que $E_1 + E_2 + \cdots + E_k = I$

(1) Prove que se $E_iE_j = 0$ quando $i \neq j$ então $E_i^2 = E_i$.

(2) Suponha que $k = 2$. Mostre que se $E_1 + E_2 = I$ e $E_1^2 = E_1$ e $E_2^2 = E_2$ então $E_1 E_2 = 0$.

Exercício 12. Sejam $W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços independentes. Se E_1 e $E - 2$ são projeções associadas, podemos afirmar que $E_1 + E_2$ é uma projeção?

Exercício 13. Seja $T : V \longrightarrow V$ a projeção de $\mathbb{R}^2$ na reta $ax + by = 0$. Encontre a matriz do operador T, mostre que T é uma projeção de fato e encontre uma base para a qual a matriz que representa T é daigonal.

Exercício 14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que o subespaço W_1 gerado por $(1, 0)$ é invariante por T e encontre um subespaço W_2 tal que $\mathbb{R} = W_1 \oplus W_2$ que seja **invariante** por T.