Curso de Verão UFPR 2020 - Álgebra Linear - Lista 3

Nessa lista suponha sempre que $\mathbb{K}$ tem produto comutativo.

1. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita, $\mathcal{B} = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ uma base ordenada de V e $B : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma $\mathbb{K}$-bilinear. Mostre que para todos $v, w \in V$ vale
$$B(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^t \mathbf{B} [v]_{\mathcal{B}},$$
onde $\mathbf{B} := (b_{ij})$ com $b_{ij} := B(v_i, v_j)$ para $i, j \in \{1, ..., n\}$.
   a) Mostre que B é simétrica se, e somente se, $\mathbf{B}$ é simétrica.
   b) Mostre que B é anti-simétrica se, e somente se, $\mathbf{B}$ é anti-simétrica.

2. Continuando com a notação do exercício anterior, suponha que B seja simétrica ou anti-simétrica. Seja $B^{\#} : V \to V^*$ a aplicação (linear) definida por
$$[B^{\#}(u)](v) := B(u, v).$$
Definimos o núcleo da forma bilinear B como Ker $B :=$ Ker $B^{\#}$. Dizemos que B é **não-degenerada** se Ker $B = \{0\}$. Mostre que B é não-degenerada se, e somente se, $\det \mathbf{B} \neq 0$.

3. Continuando com a notação dos problemas anteriores. Seja $\widetilde{\mathcal{B}} = \langle \widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_n \rangle$ outra base de V e $\widetilde{\mathbf{B}} = (B(\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_j))$ a matriz correspondente. Mostre que
$$\widetilde{\mathbf{B}} = \left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} \right)^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

4. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que a aplicação $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por
$$B((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$
é bilinear e não-degenerada. Qual é a matriz de B com respeito a base canônica de $\mathbb{R}^n$? A forma bilinear B é chamada **produto interno canônico** de $\mathbb{R}^n$.

5. Seja $V = \mathbb{R}^{2n}$. Mostre que a aplicação $B : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ definida por
$$B((x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n)) := \sum_{i=1}^{n} x_i w_i - \sum_{i=1}^{n} y_i z_i.$$
é bilinear e anti-simétrica. Como é a matriz de B na base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$? A forma bilinear B é chamada de **forma simplética canônica** de $\mathbb{R}^{2n}$.

6. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e considere a operação de produto vetorial
$$u \times v := (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1).$$
Mostre que, como uma operação binária, essa aplicação é bilinear. Lembre-se que o produto vetorial pode ser visto como um determinante. Você consegue formalizar em que espaço vetorial aquele determinante ocorre?

7. Sejam V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e considere o espaço produto $V \times W$. Seja $F(V \times W)$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial livre com base $V \times W$. Seja $S \subset F(V \times W)$ o sub-espaço vetorial gerado por todos os elementos de $F(V \times W)$ dos tipos

$$\begin{gathered}(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (k \cdot v, w) - (v, k \cdot w).\end{gathered}$$

com $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ e $k \in \mathbb{K}$. Definimos o **produto tensorial** de V e W como o espaço vetorial quociente $V \otimes W := (V \times W)/S$. Se $v \in V$ e $w \in W$, denotamos a classe de equivalência de $[(v, w)]$ por $v \otimes w$. Pela definição do sub-espaço S, note que

$$\begin{array}{c}(v_1 + kv_2) \otimes w = v_1 \otimes w + kv_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + kw_2) = v \otimes w_1 + k \cdot v \otimes w_2\end{array}.$$

A definição de $V \otimes W$ é feita para formalizar um espaço vetorial em que faz sentido fazer produtos entre vetores de V com vetores de W (sem significado), e que, por definição, esse produto seja distributivo em ambas as variáveis. Seja $\pi : V \times W \to V \otimes W$ a projeção canônica $\pi(v, w) := v \otimes w$.
Seja $T : V \times W \to Z$ uma forma bilinear. Mostre que existe uma única transformação linear $\widetilde{T} : V \otimes W \to Z$ tal que $T = \widetilde{T} \circ \pi$.

8. Sejam V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita. Definimos $T : V^* \otimes W \to L(V, W)$ da seguinte forma: Se $f \in V^*$ e $w \in W$, colocamos para cada $v \in V$

$$T(f \otimes w)(v) := f(v) \cdot w.$$

Mostre que T está bem definida e é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais.