Curso de Verão UFPR 2020 - Álgebra Linear - Lista 2

1. Em cada item abaixo, verifique se a função dada é uma transformação linear entre os espaços vetoriais indicados (com as operações usuais em cada caso). Caso seja, expresse o núcleo e a imagem dessa transformação e encontre bases para esses sub-espaços.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x, x + y, x + 2y)$.
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y + z + 1$.
   c) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \overline{z}$.
   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-y + x, x + 2y)$.
   e) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = z + \overline{z}$.
   f) $T : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ dada por $T(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$.
   g) Fixada $A \in M_n(\mathbb{C})$, a função $T_A : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ dada por $T(B) = AB + B^*A$.
   h) $T : \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}^\infty$ dada por $T(a_1, a_2, ...) = (0, a_1, a_2, ...)$.
   i) $T : P_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dada por $T(p) = p(0) + 2p(1)$.
   j) $T : P_3(\mathbb{K}) \to P_4(\mathbb{K})$ dada por $T(p(x)) = xp(x)$.

2. Encontre um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\{(-1, 0, 1), (2, 1, 1)\} \subset \text{Ker } T$. Você consegue expressar como são todas as transformações lineares com essa propriedade?

3. Encontre um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\} \subset \text{Im } T$.

4. Encontre um exemplo de transformação linear $T : P_3(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^4$ tal que $\{x+1, x-1\} \subset \text{Ker } T$ e $(1, 0, 0) \in \text{Im } T$.

5. Dê exemplo de uma transformação linear injetiva $T : P_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$.

6. Dê exemplo de uma transformação linear sobrejetiva $T : M_2(\mathbb{K}) \to P_5(\mathbb{K})$.

7. Seja $C^0[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$. Defina $T : C^0[0, 1] \to C^0[0, 1]$ por

$$T(f)(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

   para cada $t \in [0, 1]$. Verifique que T é linear. A aplicação T é sobrejetiva? Quem é Ker T?

8. Dê exemplos de transformações lineares $T, S : \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}^\infty$ tais que T seja injetiva mas não sobrejetiva e S seja sobrejetiva mas não seja injetiva.

9. Seja 0 o espaço vetorial trivial e V um espaço vetorial qualquer, considerados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Verifique que existe uma e apenas uma transformação linear de 0 em V e vice-versa.

10. Se $S \subset V$ é um sub-espaço vetorial, verifique que a inclusão $\iota : S \to V$, $\iota(v) = v$ para $v \in S$, é uma transformação linear e é injetiva.

11. Sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ transformações lineares. Mostre que se T e S são injetivas/sobrejetivas, então $S \circ T$ é injetiva/sobrejetiva. Mostre ainda que se $S \circ T$ é injetiva, então T é injetiva. Analogamente, se $S \circ T$ é sobrejetiva, então S é sobrejetiva.

12. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n.

a) Se n for ímpar, mostre que não existe transformação linear $T : V \to V$ tal que $\text{Ker } T = \text{Im } T$;

b) Mostre que a afirmação do item anterior é falsa se n for par.

13. Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear.

    a) Mostre que T é injetiva se, e somente se, T leva subconjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes.

    b) Mostre que se $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ for linearmente independente, então $\{v_1, ..., v_n\}$ é linearmente independente.

14. Mostre que se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n, então V é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

15. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$ um sub-espaço vetorial. Mostre que se $\tilde{S} \subset V$ é um complemento de V, então $\tilde{S} \cong V/S$ (de maneira não natural). Conclua que todos os complementos para S são isomorfos.

16. Encontre exemplos de um espaço vetorial V e um sub-espaço vetorial $S \subset V$ satisfazendo:

    a) $\dim V = \infty$, $\dim S = \infty$ e $\dim(V/S) = \infty$;

    b) $\dim V = \infty$, $\dim S < \infty$ e $\dim(V/S) = \infty$;

    c) $\dim V = \infty$, $\dim S = \infty$ e $\dim(V/S) < \infty$.

17. Sejam $S_1, S_2 \subset V$ sub-espaços vetoriais. Mostre que existe um isomorfismo (canônico)

$$(S_1 + S_2)/S_2 \to S_1/(S_1 \cap S_2).$$

18. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Se $\dim \text{Im } T = \dim \text{Im } T \circ T$, mostre que $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{0\}$.

19. Sejam U, V, W, Z espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e f, g, h, i transformações lineares dispostas como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "i"] & Z \end{tikzcd}$$

Dizemos que o diagrama acima é **comutativo** (ou simplesmente que comuta) se $i \circ g = h \circ f$. Suponha que g e h sejam isomorfismos e que o diagrama comuta.

    a) Mostre que f é injetiva se, e somente se, i é injetiva.

    b) Mostre que f é sobrejetiva se, e somente se, i é sobrejetiva.

    c) Mais geralmente, como encontrar $\text{Ker } i$ e $\text{Im } i$ conhecendo $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$?

20. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n e m respectivamente e fixe $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V e W respectivamente. Defina $B : V \to M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $B(v) = [v]_{\mathcal{B}}$, e $C : W \to M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, $C(w) = [w]_{\mathcal{C}}$. Finalmente, seja $T : V \to W$ uma transformação linear e defina $\widetilde{T} : M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ por $\widetilde{T}(x) = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot x$. Mostre que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & W \arrow[d, "C"] \\ M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & M_{m\times 1}(\mathbb{K}) \end{tikzcd} .$$

é comutativo. Mostre como esse exercício traduz o problema de encontrar o núcleo e a imagem de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita no problema de encontrar soluções de sistemas lineares (veja o exercício anterior). Essencialmente este problema nos diz que no contexto de espaços vetoriais de dimensão finita com bases do domínio e contra-domínio fixadas, transformações lineares consistem simplesmente na multiplicação por uma matriz.

21. Seguindo a notação do exercício anterior, mostre que a função $\Psi : L(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida por $\Psi(T) = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é um isomorfismo. Qual é a base de $L(V, W)$ que é enviada na base canônica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$? (Compare com a **Proposição 5.5**).

22. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos o **posto coluna** de A como a dimensão do espaço gerado pelas colunas de A em $M_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Defina $T : M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ por $T(x) = A \cdot x$.
    a) Verifique que **posto coluna** $(A) = \dim(\text{Im } T)$;
    b) Mostre que o posto coluna de A coincide com a quantidade de colunas linearmente independentes de A;
    c) Mostre que $\text{Ker } T$ é o conjunto solução do sistema linear homogêneo $A \cdot x = 0$.

23. Lembramos que se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, definimos o **traço** de A como $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Mostre que para todas $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ vale $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Conclua que não podem existir matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tais que $AB - BA = \text{Id}_n$.

24. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \to V$ uma transformação linear e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V. Mostre que $\text{Tr}([T]_{\mathcal{B}}) = \text{Tr}([T]_{\mathcal{C}})$. Assim, podemos definir o **traço do operador** T como o traço da matriz de T em qualquer base ordenada de V. Este exercício garante que este conceito está bem definido pois não depende da base escolhida.

25. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre a fórmula da transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que para cada $v \in \mathbb{R}^2$ (pensado como um vetor partindo da origem), $R_\theta(v)$ seja a rotação do vetor v por um ângulo θ no sentido anti-horário do plano cartesiano. Encontre a matriz de R_θ na base canônica de $\mathbb{R}^2$. Finalmente, mostre que a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to GL(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(\theta) = R_\theta$, é um morfismo de grupos. Qual é o núcleo de φ?

26. Seja $r \subset \mathbb{R}^2$ uma reta passando pela origem. Encontre a fórmula da transformação linear $P_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que para cada $v \in \mathbb{R}^2$, o vetor $P_r(v)$ é a projeção ortogonal do vetor v sobre a reta r. Calcule $\text{Tr}(P_r)$.

27. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Seja $S_1 = \{v \in V; T(v) = v\}$. Mostre que
    a) $V = \text{Ker } T \oplus S_1$;
    b) $\text{Im } T = S_1$;
    c) Conclua que $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

28. Seja $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja $T_n : V_n \to V_{n+1}$ uma transformação linear. Podemos representar a sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ com um diagrama da forma

$$\dots \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1} \longrightarrow \dots$$

Dizemos que a sequência $\mathcal{C} = (T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é um **complexo** se para todo $n \in \mathbb{Z}$ valer $\text{Im } T_n \subset \text{Ker } T_{n+1}$. Mostre que a condição para a sequência $\mathcal{C} = (T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ser um complexo é equivalente a condição $T_n \circ T_{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se $\mathcal{C}$ é um complexo, definimos a n-ésima **cohomologia do complexo** como o espaço vetorial quociente $H^n(\mathcal{C}) := \text{Ker } T_n/\text{Im } T_{n-1}$. Dizemos que o complexo $\mathcal{C}$ é **exato** se $H^n(\mathcal{C}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, em outras palavras, se $\text{Im } T_n = \text{Ker } T_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se um complexo for indexado apenas no conjuntos dos números naturais ou até mesmo em um conjunto finito, vamos subentender que os espaços vetoriais restantes são triviais (e portanto as transformações entre eles também triviais).

a) Mostre que um complexo da forma

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{T} V$$

é exato se, e somente se, T é injetiva.

b) Mostre que um complexo da forma

$$V \xrightarrow{T} W \longrightarrow 0$$

é exato se, e somente se, T é sobrejetiva.

c) Mostre que um complexo da forma

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{T} W \longrightarrow 0$$

é exato se, e somente se, T é isomorfismo.

29. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$ um sub-espaço vetorial. Mostre que a sequência

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} V/S \longrightarrow 0$$

é um complexo exato.

30. Sejam V e W espaços vetoriais, $\iota_V : V \to V \oplus W$ a inclusão $\iota_V(v) = (v, 0)$ e $\pi_W : V \oplus W \to W$ a projeção dada por $\pi_W(v, w) = w$. Mostre que a sequência

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota_V} V \oplus W \xrightarrow{\pi_W} W \longrightarrow 0$$

é um complexo exato.

31. Suponha que a sequência de espaços vetoriais e transformações lineares

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W \longrightarrow 0$$

seja um complexo exato. Mostre que a sobrejetividade de S garante a existência de uma transformação linear $\widetilde{S} : W \to V$ tal que $S \circ \widetilde{S} = \mathrm{Id}_W$. Uma tal transformação é chamada uma **seção** de S (ou uma inversa a direita de S). Use $\widetilde{S}$ para construir um isomorfismo $V \cong U \oplus W$.

32. Suponha que a sequência de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} V_4 \longrightarrow 0$$

seja um complexo exato. Mostre que

$$\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \dim V_4 = 0.$$

Generalize para o caso de n espaços vetoriais intermediários.

33. Para um sub-espaço vetorial $S \subset V$ definimos em aula o anulador de S como $S^0 = \{f \in V^*; f(s) = 0 \; \forall s \in S\}$. De forma semelhante, se $\Lambda \subset V^*$ é um sub-espaço vetorial, definimos o **espaço anulado** por Λ (ou conjunto de zeros de Λ) como

$$\Lambda^\dagger := \{v \in V; f(v) = 0 \; \forall f \in \Lambda\}.$$

Ao longo deste problema, sempre vamos identificar $V \subset V^{**}$ via a aplicação canônica $F : V \to V^{**}$, $F(v) = F_v$ para $v \in V$, que vimos ser injetiva.

a) Mostre que $\Lambda^\dagger$ é um sub-espaço vetorial de V;

b) Mostre que $\Lambda^\dagger = V \cap \Lambda^0$;

c) Mostre que $S \subset (S^0)^\dagger$ e vale a igualdade se V tiver dimensão finita;

d) Mostre que $\Lambda \subset (\Lambda^\dagger)^0$ e vale a igualdade se V tiver dimensão finita.

34. Sejam U, V e W espaços vetoriais e $T : U \to V$, $S : V \to W$ transformações lineares. Mostre que $(S \circ T)^t = T^t \circ S^t$. Além disso, mostre que $(\mathrm{Id}_V)^t = \mathrm{Id}_{V^*}$. Conclua que se T é um isomorfismo, então T^t também é um isomorfismo.

35. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, mostre que $\mathrm{Im}\ T \subset (\mathrm{Ker}\ T^t)^\dagger$. Mostre que vale a igualdade se V e W possuem dimensão finita. Discuta as consequências disto no conjunto de soluções de uma equação da forma

$$T(v) = w$$

para $w \in W$ fixado.

36. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que

$$\textbf{posto linha}(A) = \textbf{ posto coluna}(A).$$

Dica: Combine o exercício 18) com a **Proposição 6.2**.

37. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{f, g\} \subset V^*$. Mostre que S é linearmente dependente se, e somente se, $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ g$.

38. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e considere o espaço de soluções do sistema linear homogêneo associado $S = \{X \in \mathbb{K}^n; AX = 0\}$ (estamos identificando $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}^n$). Cada linha $(a_{l1}\ a_{l2}\ ...\ a_{ln})$ de A define um funcional linear $f_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ dado por $f_j(x_1, ..., x_n) := a_{l1}x_1 + ... + a_{ln}x_n$, para cada $l = 1, ..., m$. Mostre que $S = \bigcap_{l=1}^m \mathrm{Ker}\ f_j$. Escreva $r := \dim S$. Se $\{f_1, ..., f_m\} \subset (\mathbb{K}^n)^*$ for linearmente independente, mostre que $r = n - m$. O que pode ser dito sobre r se $\{f_1, ..., f_m\}$ não for necessariamente linearmente independente?