CM095 – Análise I
Prof. Hudson Lima

Lista 5 - Entrega dia 29/11/2018

- Escolha 10 questões para entregar de modo que pelo menos 4 questões sejam da seção de continuidade e pelo menos 4 questões sejam da seção de derivadas.
- Todas as questões tem o mesmo valor individual.
- Questões excedendo a quantidade máxima (10) serão consideradas como exercícios extra.
- As questões **NÃO** estão em ordem de dificuldade.
- Estas questões foram inspiradas nos exercícios dos livros do Elon Lima e do Stephen Abbott.

Continuidade

1. Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f(b) = g(b)$. Prove que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, para } a \le x \le b \\ g(x) & \text{, para } b \le x \le c \end{cases}$$

é contínua em $[a,c]$.

2. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le \alpha\}$$

é fechado, seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Prove que para todo $c \in I$ existem os limites laterais:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to c^-} f(x).$$

4. Seja $\{r_n\}$ uma enumeração dos racionais. Defina
$$f(x) = \sum_{n:r_n<x} \frac{1}{2^n}.$$
Prove que f é monótona. Quais são os pontos de descontinuidade de f?

5. Prove que toda função contínua $f\colon [a,b] \to [a,b]$ tem um ponto fixo, ou seja, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Prove que f é contínua. Se $\lambda < 1$ prove que f tem um único ponto fixo.

7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que se f é contínua em $0 \in \mathbb{R}$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$.

8. Seja $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado. Se $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = L$, então
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

Derivadas

---

1. Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $a \in X$ tais que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Prove que $f/g\colon X \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

2. Prove ou disprove:

   (a) Se a derivada de uma função não é constante, então esta derivada deve assumir algum valor irracional.

   (b) Se f' existe num intervalo que contém um ponto c tal que $f'(c) > 0$, então $f'(x) > 0$ para todo x numa vizinhança de c.

(c) Se f é diferenciável num intervalo contendo $0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to 0} f'(x) = L$, então $L = f'(0)$.

3. Seja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e $c \in (a,b)$. Considere

$$f'(c^-) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

e

$$f'(c^+) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Prove que $f'(c)$ existe se, e somente se, ambos os *limites laterais* $f'(c^-)$ e $f'(c^+)$ existem e coincidem.

4. Mostre que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ não é diferenciável em $0 \in \mathbb{R}$.

5. Determine a classe de diferenciabilidade das seguintes funções.

   (a) $f(x) = x^k \cdot |x|$;

   (b) $g(x) = \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & \text{, para } x \neq 0 \\ 0 & \text{, para } x = 0 \end{cases}$;

   (c) $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{, para } x \neq 0 \\ 0 & \text{, para } x \leq 0 \end{cases}$.

6. Sejam $p(x)$ um polinômio e $a \in \mathbb{R}$ são tais que

$$p(a) = p'(a) = p''(a) = \cdots = p^{(k)}(a) = 0.$$

Então existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = (x-a)^{k+1} q(x)$.

7. Prove que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|f'(x)| < \lambda < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f tem um único ponto fixo.

8. Prove que se $f : I \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável em um ponto a no interior de I, então

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}.$$

Extras

1. Prove que se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções reais contínuas, definidas em $X \subset \mathbb{R}$, tais que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon,\ \forall x \in X,\ \forall m, n \geq n_0,$$

então $f(x) = \lim f_n(x)$ existe para cada $x \in X$ e f é uma função contínua.

2. Sejam $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções. Prove

   (a) Se cada função (f_n) é contínua e $f_n \to f$ uniformemente, então

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

   (b) Se cada função f_n é continuamente diferenciável e $f_n' \to g$ uniformemente e existe $c \in [a, b]$ tal que $(f_n(c))$ converge, então f_n converge uniformemente para uma função derivável f e $f' = g$.