CM095 – Análise I
Prof. Hudson Lima

Lista 4 - Entrega dia 12/11/2018

- Todas as questões tem o mesmo valor individual.
- Questões inspiradas nos exercícios dos livros do Elon Lima e do Stephen Abbott.

1. Dê exemplo de uma coleção de abertos encaixados
$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$
tais que $\cap A_n$ é fechado não-vazio.

2. Seja $B = \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Ache $\overline{B}$.

3. Decida se os conjuntos abaixo são fechados, abertos ou nenhum dos dois.
$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad (0,1] \text{ e } \left\{1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. Dado $X \subset \mathbb{R}$, considere o conjunto dos pontos de acumulação de X
$$X' = \{a \in \mathbb{R} : \exists\ (x_n) \in X \setminus \{a\},\ x_n \to a\}.$$
Prove que X' é um conjunto fechado e $\overline{X} = X \cup X'$.

5. Prove que os únicos conjuntos que são abertos e fechados ao mesmo tempo são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

6. Prove que se K é compacto e F é fechado a interseção $K \cap F$ é compacto.

7. Prove que $int(A \cup B) \supset int(A) \cup int(B)$ e $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.

8. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in X$ é dito ser *um ponto isolado de* X se existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X = \{a\}$. Prove que X é finito se, e somente se, X é compacto e todos os seus pontos são isolados.

9. Defina a distância de $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ como

$$d(a, X) = \inf\{|a - x| : x \in X\}.$$

Prove que

(a) $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{X}$.

(b) Se F é fechado e $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, existe $b \in F$ tal que $d(a, F) = |a - b|$.

10. Se F é fechado e $X \subset F$ prove que $\overline{X} \subset F$. Conclua que

$$\overline{X} = \bigcap_{X \subset F = \overline{F}} F,$$

ou seja, $\overline{X}$ é a interseção de todos os fechados contendo X (o menor fechado contendo X).