CM095 – Análise I
Prof. Hudson Lima

---

Lista extra de Sequências

---

- Esta é uma lista extra para auxiliar na nota das listas e como tal não há prazo para entrega. No entanto, se ela for entregue até a data da primeira prova, sua nota adicionará até 50% da nota da Lista 3. Entrega posterior conta como exercícios extra.
- A maioria das questões desta lista foram tiradas do Livro *Understanding Analysis* de Stephen Abbott.
- Todas as questões tem o mesmo valor individual.

---

1. Verifique usando a definição de limite que:

   (a) $\lim \dfrac{1}{6n^2+1} = 0;$

   (b) $\lim \dfrac{3n+1}{2n+5} = \dfrac{3}{2};$

   (c) $\lim \dfrac{2}{\sqrt{n+3}} = 0.$

2. Argumente que a sequência

   $$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$$

   não converge para zero (A quantidade de zeros entre 1's cresce linearmente).

3. Denote por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a $x$. Calcule os limites:

   (a) $\lim \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$

   (b) $\lim \left\lfloor \frac{10+n}{2n} \right\rfloor$

4. Seja $x_n \geq 0$ uma sequência. Prove

   (a) Se $x_n \to 0$, então $\sqrt{x_n} \to 0$.

   (b) Se $x_n \to x$, então $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

5. Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ duas sequências. Defina a sequência mista $(z_n)$ da seguinte maneira

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...).$$

Prove que $z_n$ converge se, e somente se, $(x_n)$ e $(y_n)$ convergem para o mesmo valor.

6. Dê exemplos ou disprove:

   (a) $(x_n)$ e $(y_n)$ divergentes com $(x_n + y_n)$ convergente.

   (b) $(x_n)$ convergente, $(y_n)$ divergente com $(x_n + y_n)$ convergente.

   (c) $(x_n)$ converge e $x_n \neq 0$, mas $(\frac{1}{x_n})$ diverge.

   (d) $(a_n)$ ilimitada com $(b_n)$ convergente e $(a_n - b_n)$ limitada.

   (e) $(a_n)$ e $(a_n b_n)$ convergentes com $(b_n)$ divergente.

7. Dê exemplos ou disprove:

   (a) Sequência ilimitada com subsequência convergente.

   (b) Sequência monótona ilimitada com subsequência convergente.

   (c) Uma sequência que contém subsequências convergindo para qualquer ponto no conjunto $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...\}$.

   (d) Uma sequência que tem uma subsequência limitada, mas não possui nenhuma subsequência convergente.

8. Seja $(a_n)$ uma sequência limitada.

   (a) $y_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ é convergente.

   (b) Chamamos o limite acima de *limite superior* e o denotamos como $\limsup a_n$. Dê significado para o *limite inferior* $\liminf a_n$.

   (c) Prove que $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ e dê exemplos onde a igualdade não ocorre.

   (d) Prove que $\lim a_n$ existe se, e somente se, $\liminf a_n = \limsup a_n$.

9. Fixado $a \in \mathbb{R}$ e $(a_n)$ uma sequência real. Prove os dois items abaixo.

   (a) $\lim a_n = a$ se, e somente se, $(a_n)$ é limitada e toda subsequência de $(a_n)$ que converge tem limite $a$.

   (b) $\lim a_n = a$ se, e somente se, toda subsequência de $(a_n)$ possui uma subsequência que converge para $a$.