CM095 – Análise I
Prof. Hudson Lima

Lista 03 - Entrega: (quarta-feira) 17/10/2018

- Resolva os seguintes exercícios do Capítulo 4 do livro Curso de Análise vol.I.: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

  A nota máxima desta lista é $(1 + 2 + \cdots + N)$, onde N é o número de questões na lista.

- O valor individual das questões coincide com o número que ela corresponde. Desta forma, a questão 1 vale 1 ponto, a questão 2 vale 2 pontos, e assim por diante.

---

1. (q.01) Se $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$. Dê um contra-exemplo mostrando que a recíproca é falsa, salvo quando $a = 0$.

2. (q.02) Seja $\lim x_n = 0$. Para cada n, ponha $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$. Prove que $y_n \to 0$.

3. (q.03) Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$, prove que $\lim x_n = a$.

4. (q.04) Se $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k$ e $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}_1} x_n = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}_2} x_n = \cdots = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}_k} x_n = a$, então, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$.

5. (q.05) Dê exemplo de uma sequência (x_n) e uma decomposição $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \cup \cdots$ de $\mathbb{N}$ como uma reunião de uma infinidade de conjuntos infinitos tais que, para todo k, a subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$ tenha limite a, mas não se tem $\lim x_n = a$.

6. (q.10) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n, então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

7. (q.11) Use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica dos $n+1$ números $1 - 1/n, 1 - 1/n, ..., 1 - 1/n, 1$ e prove que a seqüência $(1 - 1/n)^n$ é crescente. Conclua que $(1 - 1/n)^n \geq 1/4$ para todo $n > 1$.

   Sejam $x_n = (1+1/n)^n$ e $y_n = (1-1/(n+1))^{n+1}$. Mostre que $\lim x_n y_n = 1$ e deduza daí que $\lim(1 - 1/n)^n = e^{-1}$.

8. (q.12) Fazendo $y = x^{\frac{1}{k}}$ e $b = a^{\frac{1}{k}}$ na identidade

$$y^k - b^k = (y-b) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y^i b^{k-i-1}$$

obtenha $(x-a) = (x^{\frac{1}{k}} - a^{\frac{1}{k}}) \sum_{i=0}^{k-1} x^{\frac{i}{k}} a^{1-\frac{i+1}{k}}$ e use isto para provar que se $\lim x_n = a$, então $\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$. Conclua, daí, que $\lim (x_n)^r = a^r$ para todo r racional.

9. (q.13) Prove que para todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$.

10. (q.14) Seja $a \geq 0$, $b \geq 0$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

11. (q.20) Seja $x_1 = 1$ e defina $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Verifique que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Conclua que existe $a = \lim x_n$ e determine a. `Vocês veem Fibonacci?`

12. (q.21) Ponha $x_1 = 1$ e defina $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Mostre que a seqüência (x_n), assim definida, é limitada. Determine $a = \lim x_n$.

13. (q.22) A fim de que a sequência (x_n) não possua subsequência convergente é necessário e suficiente que $\lim |x_n| = +\infty$.

14. (q.25) Seja $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existirem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $0 < |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leq c < 1$ para todo $n > n_0$, então $\lim |x_n| = 0$. Se, porém, $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \geq c > 1$, então $\lim |x_n| = +\infty$. Como aplicação, reobtenha os Exemplos 21 e 22 e mostre que $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

15. (q.27) Se $\lim x_n = a$, pondo $y_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n = a$.

16. (q.28) Se $\lim x_n = a$ e os x_n são todos positivos, então $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$. [*Sugestão: Tome logarítmo e reduza ao problema aterior.*] Conclua que se $a_n > 0$ e $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, então $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

17. (q.29) Seja $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\sum y_n = +\infty$. Se $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$, então $\lim \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = a$.

18. (q.30) Se (y_n) é crescente e $\lim y_n = +\infty$, então $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \Rightarrow \lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$. (Use o exercício anterior.)

19. (q.32) Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $0 < e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) < \frac{1}{n \cdot n!}$. Conclua daí que o número e é irracional.

20. (q.33) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)...2n} = \frac{4}{e}$. (Use o final do Exercício 28.)

21. (q.34) Prove que se definirmos a_n pela igualdade $n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot a_n$, teremos $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

22. (q.35) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se $\sum b_n = +\infty$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$, então $\sum a_n = +\infty$.

23. (q.36) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, então $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

24. (q.37) Para todo polinômio $p(x)$ de grau superior a 1, a série $\sum \frac{1}{p(n)}$ converge.

25. (q.40) Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \cdots$ é convergente e calcule sua soma.

26. (q.41) Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, a série $\sum \frac{1}{n(n+1)...(n+p)}$ converge.

27. (q.42) Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0$, então $\sum (a_n)^2$ e $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ convergem.

28. (q.43) Se $\sum (a_n)^2$ converge, então $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

29. (q.44) Se (a_n) é decrescente e $\sum a_n$ converge, então $\lim n \cdot a_n = 0$.

30. (q.46) Seja (a_n) uma sequência não-crescente, com $\lim a_n = 0$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.