CM095 – Análise I
Prof. Hudson Lima

Lista 01 - Entrega: (quarta-feira) 15/08/2018

- Resolva todos os excercícios do Capítulo 1 do livro Curso de Análise vol.I. A nota máxima desta lista é $(1 + 2 + \cdots + N)$, onde N é o número de questões na lista.
- O valor individual das questões coincidem com o número que ela corresponde. Desta forma, a questão 1 vale 1 ponto, a questão 2 vale 2 pontos, e assim por diante.

---

1. Dados conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

   (a) $X \supset A$ and $X \supset B$,

   (b) If $Y \supset A$ and $Y \supset B$, then $Y \supset X$.

   Prove que $X = A \cup B$.

2. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior caracterizando $A \cap B$.

3. Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \varnothing$ se, e somente se, $A \subset B^c$. Prove também que $A \cup B = E$ se, e somente se, $A^c \subset B$.

4. Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \varnothing$.

5. Dê exemplos de conjuntos **não vazios** A, B e C, tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

6. Se $A, X \subset E$, são tais que $A \cap X = \varnothing$ e $A \cup X = E$, prove que $X = A^c$.

7. Se $A \subset B$, então, $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$, para todo conjunto C. Por outro lado, se existir C de modo que a igualdade acima seja satisfeita, então $A \subset B$.

8. Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \varnothing$.

9. Prove que $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

10. Seja $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A\Delta B = A\Delta C$ implica $B = C$. Examine a validez de um resultado análogo com $\cap$, $\cup$ ou $\times$ em vez de Δ.

11. Prove as seguintes afirmações:

    (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

    (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

    (c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

    (d) $A \subset A'$ e $B \subset B'$ implica $A \times B \subset A' \times B'$.

12. Dada a função $f\colon A \to B$:

    (a) prove que se tem $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$, sejam quais forem os subconjuntos X e Y de A;

    (b) mostre que se f é injetiva então $f(X) - f(Y) = f(X - Y)$ para quaisquer X e Y contidos em A.

13. Mostre que a função $f\colon A \to B$ é injetiva se, e somente se, $f(A - X) = f(A) - f(X)$ para todo $X \subset A$.

14. Dada uma função $f\colon A \to B$, prove:

    (a) $f^{-1}(f(X)) \supset X$ para todo $X \subset A$;

    (b) f é injetiva se, e somente se, $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A$.

15. Dada $f\colon A \to B$, prove:

    (a) Para todo $Z \subset B$, tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$;

    (b) f é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(Z)) = Z$ para todo $Z \subset B$.

16. Dada uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

    (a) para todo $\lambda \in L$, tem-se $X \supset A_\lambda$;

    (b) se $Y \supset A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, então $Y \supset X$.

    Prove que, nestas condições, tem-se $X = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

17. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $\cap_{\lambda \in L} A_\lambda$.

18. Seja $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ uma função tal que $X \subset Y \Rightarrow f(Y) \subset f(X)$ e $f(f(X)) = X$. Prove que $f(\cup X_\lambda) = \cap f(X_\lambda)$ e $f(\cap X_\lambda) = \cup f(X_\lambda)$. [Aqui X, Y e X_λ são subconjuntos de A].

19. Dadas as famílias $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(B_\mu)_{\mu\in M}$, forme duas famílias com índices em $L \times M$ considerando os conjuntos

$$(A_\lambda \cup B_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M} \qquad \text{e} \qquad (A_\lambda \cap B_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}.$$

Prove que se tem

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\Big) \cap \Big(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\Big) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu),$$

$$\Big(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\Big) \cup \Big(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\Big) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

20. Seja $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos com índices no conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Prove, ou disprove por contra-exemplo, a igualdade

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}\Big) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\Big).$$

21. Dados os conjuntos A, B, C, estabeleça uma bijeção entre $\mathcal{F}(A\times B; C)$ e $\mathcal{F}(A; \mathcal{F}(B; C))$.